Практикум из Математике 2 – ЈУНСКИ РОК – 9. 6. 2022.

Универзитет у Београду – Електротехнички факултет

Име и презиме: Број индекса:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	Сума

Испит траје 90 минута. Сваки задатак вреди 10 бодова.

1. Дат је интеграл $\int_1^e x \ln^n x \, \mathrm{d}\, x$, $n \in \mathbb{N}_0$.

(а) Израчунати I_0 и I_1.

(б) Одредити коефицијенте a_n и b_n тако да важи $I_{n+1} = a_n\, I_n + b_n$.

(в) Израчунати I_3.

2. Израчунати величину:

(а) површине фигуре коју заклапају крива $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ и праве $y = 0$ и $x = 1$;

(б) запремине тела насталог ротацијом дате фигуре око x-осе.

3. Одредити опште решење диференцијалне једначине $y' - x\,y = x^3\,y^2$.

4. Испитати конвергенцију редова:

(а) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln n}$; **(б)** $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n-2}\right)$; **(в)** $\displaystyle\sum_{n=10}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

5. Дат је систем линеарних алгебарских једначина са

$$\begin{aligned} x+(1-a)\,y+az &= 0 \\ ax-y+z &= 0 \\ x-z &= 0 \\ y-(a+1)\,z &= 0 \end{aligned}.$$

(а) У зависности од вредности параметра $a \in \mathbb{R}$, применом Кронекер-Капелијеве теореме дискутовати дати систем.

(б) Решити дати систем за $a = 3$.

6. Дата је матрица $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

(а) Одредити карактеристични и минимални полином матрице B.

(б) Одредити B^n, $n \in \mathbb{N}_0$.

7. Дате су праве $m: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$ и $n: x = 3 - y = 5 - z$.

(а) Показати да се праве m и n налазе у једној равни и одредити њихов међусобни положај.

(б) Одредити једначину равни π која садржи тачку $S\,(1, 0, 3)$ и паралелна је равни која садржи праве m и n.

– Решења –

1. Имамо да је $I_0=\displaystyle\int_1^e x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\Big|_1^e=\frac{e^2-1}{2}$ и

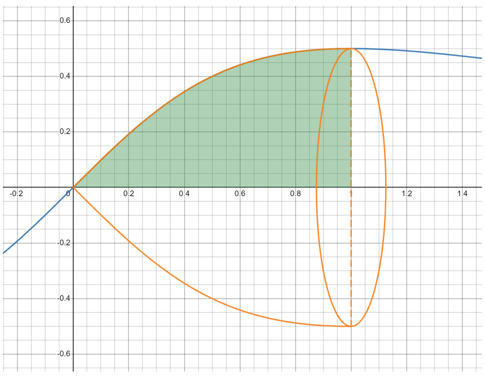
$$I_1=\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{ll} u=\ln x, & \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x,\\ \mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}, & v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right\}=\frac{x^2\ln x}{2}\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e=\frac{e^2+1}{4}.$$

Даље важи да је

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e x\ln^{n+1}x\,\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{ll} u=\ln^{n+1}x, & \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x,\\ \mathrm{d}u=(n+1)\frac{\ln^n x\,\mathrm{d}x}{x}, & v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right\}\\ &= \frac{x^2\ln^{n+1}x}{2}\Big|_1^e-(n+1)\int_1^e\frac{x\ln^n x}{2}\mathrm{d}x=\frac{e^2}{2}-\frac{n+1}{2}I_n. \end{aligned}$$

Одакле закључујемо да је $a_n=-\dfrac{n+1}{2}$ и $b_n=\dfrac{e^2}{2}$. И на крају, применом претходне формуле добијамо $I_3=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{3}{2}I_2=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{e^2}{2}-I_1\right)=\dfrac{3}{2}I_1-\dfrac{e^2}{4}=\dfrac{3e^2+3}{8}-\dfrac{e^2}{4}=\dfrac{e^2+3}{8}$.

2. Величина површине фигуре коју заклапају крива $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ и праве $y=0$ и $x=1$ једнака је $P=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1=\ln\sqrt{2}$.



Величина запремине тела које добијамо ротацијом фигуре коју заклапају крива $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ и праве $y=0$ и $x=1$ око x-осе једнака је

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{ll} u=x, & \mathrm{d}v=\frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2},\\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x, & v=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\end{array}\right\}\\ &= -\frac{\pi}{2}\frac{x}{1+x^2}\Big|_0^1+\pi\int_0^1\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}\\ &= -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}x\Big|_0^1=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2-2\pi}{8}. \end{aligned}$$

3. У питању је Бернулијева диференцијална једначина. Сменом $z=y^{-1}$, $z'=-y^{-2}y'$, једначину $y'-x\,y=x^3y^2$, сводимо на линеарну диференцијалну једначину $z'+x\,z=-x^3$. Множењем дате једначине са $e^{\int x\,\mathrm{d}x}$ добијамо $z'e^{\int x\,\mathrm{d}x}+x\,ze^{\int x\,\mathrm{d}x}=\left(z\,e^{\int x\,\mathrm{d}x}\right)'=-x^3e^{\int x\,\mathrm{d}x}$. Одакле следи да је $z=e^{-\int x\,\mathrm{d}x}\left(C-\displaystyle\int x^3e^{\int x\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)$. Интеграл $\displaystyle\int x^3e^{\int x\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=\int x^3e^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$ решавамо увођењем смене $t=\dfrac{x^2}{2}$ и применом методе парцијалне интеграције. Имамо да је

$$\begin{aligned} \int x^3e^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x &= 2\int te^t\mathrm{d}t=\left\{\begin{array}{ll} u=t, & \mathrm{d}v=e^t\,\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}t, & v=e^t\end{array}\right\}\\ &= 2\,t\,e^t-2\int e^t\mathrm{d}t=2\,t\,e^t-2\,e^t+\widetilde{C}=\left(x^2-2\right)e^{\frac{x^2}{2}}+\widetilde{C}. \end{aligned}$$

Према томе, добијамо да је $z=e^{-\frac{x^2}{2}}\left(C-\left(x^2-2\right)e^{\frac{x^2}{2}}\right)=Ce^{-\frac{x^2}{2}}+2-x^2$, тј. $y=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{Ce^{-\frac{x^2}{2}}+2-x^2}=\dfrac{e^{\frac{x^2}{2}}}{C+2e^{\frac{x^2}{2}}-x^2e^{\frac{x^2}{2}}}$.

4.

(а) Како је $\cos(n\pi) = (-1)^n$, то је општи члан реда једнак $\frac{(-1)^n}{\ln n}$, те је дати ред алтернирајући. Важи да је $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$ и низ $\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ је монотоно опадајући $\left(\ln n < \ln(n+1) \ \Rightarrow\ \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\ln(n+1)}\right)$, одакле на основу Лајбницовог критеријума следи да ред $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln n}$ конвергира.

(б) За општи члан ред важи $\ln\left(\frac{n+2}{n-2}\right) = \ln\left(\frac{n-2+4}{n-2}\right) = \ln\left(1+\frac{4}{n-2}\right) \sim \frac{4}{n-2} \sim \frac{4}{n}$, када $n \to +\infty$, одакле на основу другог поредбеног критеријума следи да су редови $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n-2}\right)$ и $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{4}{n}$ еквиконвергентни. Како ред $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{4}{n}$ дивергира (то је хармонијски ред), следи да дивергира и ред $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+2}{n-2}\right)$.

(в) Важи да је $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)}\right]^{-\frac{n}{n+1}}$, где је a_n општи члан реда. Имамо да је $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)}\right]^{-\frac{n}{n+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Како је $\frac{1}{e} < 1$, на основу Кошијевог кореног критеријума следи да ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ конвергира.

Дакле, конвергентни су редови под **(а)** и **(в)**.

5. Дати систем је хомоген. Према Кронекер-Капелијевој теореми, хомоген систем је увек сагласан, јер је ранг матрице хомогеног система увек једнак рангу проширене матрице тог система. Да бисмо утврдили природу решења датог система, довољно је одредити ранг матрице система коју ћемо означити са A. Приметимо да ранг ове матрице може да буде једнак највише 3.

(а) Заменимо места првој и трећој врсти матрице A, а потом прву врсту помножену са $-a$ додајмо другој врсти и прву врсту одузмимо од треће врсте. Добијамо

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-a & a \\ a & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -a-1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & -1 & 1 \\ 1 & 1-a & a \\ 0 & 1 & -a-1 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1+a \\ 0 & 1-a & a+1 \\ 0 & 1 & -a-1 \end{bmatrix}.$$

Затим другу врсту одузмимо од треће врсте и другу врсту додајмо четвртој врсти. Потом заменимо места другој и трећој колони. Следи

$$A \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1+a \\ 0 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1+a & -1 \\ 0 & 0 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Закључујемо да је $\operatorname{rang} A = 3$ за $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1,2\}$, иначе је $\operatorname{rang} A = 2$. Дакле, за $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1,2\}$ матрица A има максималан ранг, који је истовремено једнак броју променљивих у систему, па дати систем у том случају има јединствено решење и то је тривијално (нула) решење. Иначе, систем има бесконачно много решења у којима фигурише један реалан параметар.

(б) На основу дела под **(а)** закључујемо да дати систем има јединствено решење за $a = 3$ и то решење је тривијално.

6. Карактеристични полином матрице B једнак је $\varphi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 3 & 6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)(3-\lambda) + 12 + 12 - 3(4-\lambda) - 12(1-\lambda) - 4(3-\lambda) = 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 12\lambda + 7\lambda^2 - \lambda^3 + 24 - 12 + 3\lambda - 12 + 12\lambda - 12 + 4\lambda = 8\lambda^2 - \lambda^3 = \lambda^2(8-\lambda)$. Како минимални и карактеристични полиноми имају исте факторе, конкуренти за минимални полином матрице B су $\mu_1(\lambda) = \lambda(\lambda - 8)$, $\mu_2(\lambda) = -\varphi_A(\lambda)$. По дефиницији, минимални полином матрице B је монични полином најнижег степена који матрица B анулира. Имамо да је $B(B - 8\,I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} = \mathbb{O}_{3\times 3}$, одакле закључујемо да је $\mu(\lambda) = \lambda(\lambda - 8)$ минимални полином матрице B. Имамо да је $B^2 = 8B$, одакле једноставно показујемо да је $B^{n+1} = 8^n B$, $n \in \mathbb{N}$. Са друге стране, множењем једнакости $B^2 - 8B = \mathbb{O}_{3\times 3}$ са B^n, $n \in \mathbb{N}_0$ добијамо $B^{n+2} - 8B^n = \mathbb{O}_{3\times 3}$. Одговарајућа карактеристична једначина је $\lambda^2 - 8\lambda = 0$. Њени корени $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 8$ су реални и различити, па је опште решење матричне једначине дато са $B^n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n = C_2\,8^n$. Како је $B^2 = 8B$, за $n = 2$ добијамо да је $C_2 = \frac{1}{64}B^2 = \frac{1}{8}B$. Према томе, имамо да је $B^n = 8^{n-1}B$, за $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

7. Параметарски облик једначине праве m је

$$x = t + 2, \quad y = -t + 1, \quad z = 2t, \quad t \in \mathbb{R},$$

док је параметарски облик једначине праве n једнак

$$x = s, \quad y = -s + 3, \quad z = -s + 5, \quad s \in \mathbb{R}.$$

(а) Из једначина правих m и n закључујемо да тачка $M\,(2,1,0)$ припада правој m и да је вектор правца праве m дат са $\overrightarrow{v_m} = (1,-1,2)$, као и да тачка $N\,(0,3,5)$ припада правој n и да је вектор правца праве n дат са $\overrightarrow{v_n} = (1,-1,-1)$. Мешовити производ вектора $\overrightarrow{v_m}$, $\overrightarrow{v_n}$ и $\overrightarrow{MN}$ је

$$\left[\overrightarrow{v_m}, \overrightarrow{v_n}, \overrightarrow{MN}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

одакле закључујемо да су дати вектори компланарни, што значи да се праве m и n налазе у истој равни. Како вектори праваца ових правих нису колинеарни, следи да се дате праве секу.

(б) Означимо са α раван у којој се налазе праве m и n. Према услову задатка знамо да тачка $S\,(1,0,3)$ припада траженој равни π. Да бисмо одредили једначину равни π, потребно је да пронађемо њен вектор нормале $\overrightarrow{n_\pi}$. С обзиром на то да су равни π и α паралелне, следи да су њихови вектори нормала $\overrightarrow{n_\pi}$ и $\overrightarrow{n_\alpha}$ колинеарни. Како праве m и n леже у равни α, вектор нормале те равни је колинеаран са $\overrightarrow{v_m} \times \overrightarrow{v_n}$. Векторски производ вектора $\overrightarrow{v_m}$ и $\overrightarrow{v_n}$ је

$$\overrightarrow{v_m} \times \overrightarrow{v_n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (3,3,0)\,.$$

Дакле, вектор нормале равни α је $\overrightarrow{n_\alpha} = (1,1,0)$, одакле следи да је вектор нормале равни π једнак $\overrightarrow{n_\pi} = (1,1,0)$. Како тачка $S\,(1,0,3)$ припада равни π, следи да је њена једначина $\pi : x + y - 1 = 0$.